JoP, Vol. 6 No.1, November 2020: hal 20 - 23 ISSN: 2502-2016

DINAMIKA SISTEM MEKANIK NON-HOLONOMIK DENGAN METODE KONEKSI LEVI-CIVITA TERKENDALA BERBASIS KOMPUTASI FISIKA

Melly Ariska[1*], Hamdi Akhsan[1], Muhammad Muslim[1]
[1]*Program Studi Pendidikan Fisika FKIP Universitas Sriwijaya*
[*]email: mellyariska@fkip.unsri.ac.id

ABSTRAK

Perhitungan persamaan gerak untuk sistem non holonomik dapat disajikan dengan metode langsung dan efisien untuk sistem Lagrangan yang tunduk pada kendala tak holonomik. Beberapa kasus khusus pada sistem mekanik non holonomik masih memunculkan Pengali Lagrange atau gaya kendala (γ)*, sehingga mengalami kesulitan untuk mencari basis yang tersusun atas medan vektor-medan vektor yang dapat melenyapkan forma-forma kendala. Sistem mekanik non holonomik yang diselesaikan pada penelitian ini adalah dinamika Stroller (kereta bayi) yang bergerak kompleks secara translasi sekaligus rotasi. Dinamika stroller dapat digambarkan dengan jelas berupa himpunan persamaan diferensial. Persamaan gerak stroller diturunkan dengan metode koneksi Levi-Civita terkendala. Sistem dengan kendala tak holonomik dapat disembunyikan dengan membangun atau memilih koneksi Levi-Civita tertentu. Tujuan disembunyikannya kendala adalah untuk menghilangkan pengali Lagrange pada persamaan gerak. Penelitian ini merupakan upaya untuk lebih memahami sistem dengan kendala tak holonomik dari sudut pandang mekanika geometrik, yang menganalisis masalah gerak secara geometris. Penyelesaian persamaan gerak sistem non holonomik diselesaikan dengan bantuan komputasi fisika yaitu menggunakan Maple 18.*

Kata kunci: *Dinamika Geometrik, Stroller, Pengali Lagrange, Koneksi Levi-Civita*

ABSTRACT

[Title: Dynamics of Non-Holonomic Mechanical Systems using Levi-Civita Method Based on Computation Physics]
Calculation of motion equations for non-holonomic systems can be presented by direct and efficient methods for Lagrangan systems which are subject to non-holonomic constraints. Some special cases in non-holonomic mechanical systems still cause Lagrange Multiplier or constraint force (γ)*, so that it is difficult to find a base composed of vector fields that can eliminate the constraint forms. The non-holonomic mechanical system that was completed in this study is the dynamics of the Stroller (baby carriage) that moves in translational and rotational complexes. Stroller dynamics can be clearly illustrated as a set of differential equations. The stroller motion equation is derived by the constrained Levi-Civita connection method. Systems with non-holonomic constraints can be hidden by establishing or selecting certain Levi-Civita connections. The purpose of hiding the obstacle is to eliminate the Lagrange multiplier in the equation of motion. This research is an attempt to better understand the system with non-holonomic constraints from the viewpoint of geometric mechanics, which analyzes the problem of motion geometrically. Solving the equations of motion of a non-holonomic system is solved with the help of physics computing using Maple 18.*

Keywords: *Geometric dynamics, Stroller, Lagrange Multiplier, Levi-Civita Connection*

PENDAHULUAN

Geometri pada keragaman adalah kurva atau permukaan licin atau objek yang serupa dengan dimensi lebih tinggi (Branicki & Shimomura, 2006; Ueda et al., 2005). Keragaman riil berdimensi n merupakan suatu ruang topologis yang secara local homeomorfis dengan R^n, artinya setiap titik pada keragaman memiliki lingkungam yang mirip dengan suatu lingkungan di R^n (Glad et al., 2007). Keadaan keragaman suatu ruang bergantung pada topologi ruang tersebut. Keragaman dipandang sebagai ruang topologis karena ada himpunan terbuka yang akan digunakan sebagai lingkungan (atau domain tata koordinat) (Branicki et al., 2006). Keragaman dapat juga dikatakan suatu ruang matematik dengan skala yang cukup kecil yang menyerupai Ruang Euclid dengan dimensi tertentu (Bou-Rabee et al., 2004).

Pada keragaman diperlukan lebih dari satu tata koordinat ke koordinat lain sedemikian rupa sehingga semua tata koordinat sama baiknya untuk menggambarkan segala sesuatunya seperti pemetaan, medan vektor, diferensial dan lainnya (Fowles & Cassiday, 2004). Dengan demikian keragaman dapat dikatakan sebagai suatu upaya membangun tata koordinat dari suatu ruang berupa kumpulan titik-titik, garis-garis atau fungsi-fungsi (Domercq et al., 2015).

Keragaman yang ditinjau pada penelitian ini adalah keragaman konfigurasi pada Stroller (kereta bayi). Stroller adalah contoh sederhana sistem gerak mekanika geometric non holonomik, namun kajian mekanikanya jelas tidak sepele. Stroller adalah kendaraan roda tiga yang digunakan oleh BaTiTa untuk berbagai tujuan. Sistem dinamika yang serupa dengan Stroller adalah troli (keranjang belanja), kereta bayi dan tricycle. (sepeda roda tiga). Pendekatan pemodelan yang dilakukan untuk merumuskan sistem gerak Stroller dilakukan dengan pendekatan sistem Levi Civita terkendala. Sistem Levi Civita merupakan salah satu cara untuk menyatakan energi sistem dengan sistemik, yang digambarkan dengan himpunan persamaan diferensial (Zobova, 2012).

Sistem mekanika Stroller diturunkan dengan menggunakan koneksi Levi-Civita terkendala dengan bantuan komputasi fisika berbasis Maple 18. Sistem dengan kendala tak holonomik dapat disembunyikan dengan membangun atau memilih koneksi Levi-Civita tertentu (Bou-Rabee et al., 2008). Tujuan disembunyikannya kendala adalah untuk menghilangkan pengali Lagrange pada persamaan gerak. Penelitian ini merupakan upaya untuk lebih memahami sistem dengan kendala tak holonomik dari sudut pandang mekanika geometric (Holm, 2011).

Permasalahan yang diselesaikan dalam penelitian ini adalah bagaimana gambaran penyelesaian secara komputasi dinamika gerak sistem mekanik dengan kendala tak holonomik dengan menggunakan metode koneksi Levi-Civita. Paper ini meninjau gerak Stroller dengan energi yang rendah dan hanya bergerak di bidang datar dan kajian yang dilakukan bersifat klasik non-relativistik. Tujuan penelitian ini adalah untuk memahami dinamika sistem mekanik dengan kendala tak holonomik berbasis komputasi fisika dan menurunkan persamaan gerak Stroller yang bergerak melalui koneksi *Levi-Civita* terkendala. Penelitian ini diharapkan dapat dimanfaatkan untuk perancangan arena dinamika Stroller, untuk memahami dinamika sistem gerak benda dengan kendala tak holonomik dan dapat bermanfaat sebagai bahan rujukan bidang robotika dan teknologi mekanik.

METODE

Penelitian ini bersifat kajian teori matematis. Penelitian ini dilakukan dengan tinjauan terhadap beberapa pustaka mengenai sistem mekanik dengan kendala tak holonomik pada kasus tricycle, tippe top, snakeboard dan *roller racer* yang telah dikembangkan sebelumnya serta perhitungan matematis (M. Ariska et al., 2020b, 2019; Sriyanti et al., 2020). Keragaman yang akan ditinjau adalah keragaman konfigurasi pada Stroller yang bergerak di bidang datar dengan koneksi Levi-Civita dengan berbantuan komputasi fisika berbasis Maple 18.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sistem dengan kendala dan gaya luar dapat digambarkan dengan koneksi Levi-Civita terkendala (*Constraned Affine Connection*). Stroller merupakan sistem mekanik terkendali dengan kendala tak holonomik. Sementara secara umum sistem mekanik sederhana dapat digambarkan sebagai berikut (M. Ariska et al., 2020a; Melly Ariska et al., 2018; Moffatt & Tokieda, 2008):

1. Suatu keragaman berdimensi n disebut keragaman konfigurasi dengan sistem koordinat $(q^1, \ldots, q^n)$.
2. Tensor inersia $M = \{M_{ij}\}$ menggambarkan energi kinetik, kelembaman terhadap koordinat umum, dan menentukan produk skalar di dalam medan vektor Q,
3. Tensor kovarian berderajat satu $F_1, \ldots, F_m$ menggambarkan gaya luar terkendali.

Dalam turunan kovarian ada yang disebut dengan symbol Christoffel $\{\Gamma^i_{jk}: i, j, k \in \{1, \ldots, n\}\}$ tensor inersia M yang didefinisikan menurut

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} M^{li} \left(\frac{\partial M_{lj}}{\partial q^k} + \frac{\partial M_{lk}}{\partial q^j} - \frac{\partial M_{kj}}{\partial q^l} \right) \quad (1)$$

dengan M^{li}adalah komponen-komponen M^{-1}. M^{li} merupakan tensor matriks kontravarian. dengan indeks boneka $M^{\square\square}$, $M^{\mu\mu}$, $M^{\theta\theta}$, $M^{\varphi\varphi}$. Pada bidang datar symbol Christoffel *Levi-Civita* yang berhubungan dengan ∇ lenyap, $\Gamma^i_{jk} = 0$. Tensor matriks kontravarian menyisakan komponen sebagai berikut,

$$M^{\square\square} = \frac{1}{ma\sqrt{sinh^2\xi + sin^2\square}},$$

$$M^{\mu\mu} = \frac{1}{ma\,cosh^2\xi + \cos \square},$$
$$M^{\theta\theta} = \frac{1}{J}$$
$$M^{\varphi\varphi} = \frac{1}{J_f}$$

Sedemikian rupa sehingga simbol Christoffel untuk Stroller yang bergerak pada permukaan bidang datar berjumlah 42, akan tetapi hanya ada 2 simbol Christoffel yang tidak lenyap, yaitu sebagai berikut,

$$\Gamma^{\mu}_{\square\mu} = \Gamma^{\mu}_{\mu\square} = -\frac{1}{2}\tan \square \qquad (2)$$

Persamaan gerak untuk tata koordinat Stroller berdasarkan persamaan (1) dan (2) adalah

$$\ddot{q}^k + \tilde{\Gamma}^k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = \sum_{a=1}^{m} M^{kj}(F_a)_j u_a \qquad (3)$$

dengan $(F_a)_j$ adalah komponen gaya luar sepanjang koordinat $\hat{J}$, $\ddot{q}^k + \tilde{\Gamma}^k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ merupakan percepatan, dan M^{kj} adalah tensor matriks kontravarian.

Basis Ortogonal untuk kecepatan-kecepatan pada Stroller dengan kendala non holonomik digambarkan dengan keragaman, tensor inersia, gaya masukan, dan himpunan kendala forma berderajat satu $\omega_1, \dots, \omega_p$. Kumpulan kecepatan yang diizinkan dalam hal ini dinamakan distribusi kendala. Pelenyapan kendala forma berderajat satu $\omega_1, \dots, \omega_p$ adalah distribusi kecepatan yang dibatasi dalam kendala yang berdimensi $n - p$, dengan n merupakan dimensi keragaman sedangkan p adalah jumlah kendala.

Stroller yang bergerak pada bidang datar memiliki vektor kecepatan sepanjang batang (v_x) dan kecepatan yang tegak lurus terhadap batang (v_y), yakni

$$v_x = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$
$$v_y = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \qquad (4)$$

karena ada 4 koordinat dan 2 kendala, maka dibutuhkan 2 basis. Himpunan kecepatan yang diizinkan dihasilkan oleh medan vektor. Medan vektor untuk Stroller yang bergerak pada bidang datar dapat dituliskan dengan,

$$X_1 = l\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + l\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} + \tan\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$= lv_x + \tan\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Berdasarkan persamaan (3) dengan v^i komponen $\dot{q}$ menurut basis $\{X_1, \dots, X_{n-p}\}$, sehingga persamaan kinematika untuk Stroller yang bergerak di bidang datar adalah

$$\dot{q}^k = (\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$$

$$\dot{q} = \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \dot{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$
$$= v^1X_1 + v^2X_2$$

$$(\dot{x} - v^1 l\cos\theta)\frac{\partial}{\partial x} + (\dot{y} - v^1 l\sin\theta)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$+ \left(\dot{\theta} - v^1\tan\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$+ (\dot{\varphi} - v^2)\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$$

Sehingga diperoleh laju-laju koordinat sebagai berikut :

$$\dot{x} = v^1 l\cos\theta$$
$$\dot{y} = v^1 l\sin\theta$$
$$\dot{\theta} = v^1 l\tan\varphi$$
$$\dot{\varphi} = v^2$$

didapatkan hasil bahwa persamaan kinematika Stroller sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}l\cos\theta\\ l\sin\theta\\ \tan\varphi\end{pmatrix}v$$

dengan $v = v^1$.

KESIMPULAN

Perhitungan persamaan gerak untuk Stroller dapat disajikan dengan metode langsung dan efisien untuk sistem Lagrangan yang tunduk pada kendala tak holonomik. Kendala dan gaya luar pada sistem Stroller dapat digambarkan dengan metode koneksi *Levi-Civita* terkendala. Oleh karena itu, akan ada Lagrange pada persamaan gerak yang hilang. Persamaan kinematika Stroller sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}l\cos\theta\\ l\sin\theta\\ \tan\varphi\end{pmatrix}v$$

dengan $v = v^1$.

Berdasarkan persamaan tersebut dapat dijelaskan bahwa Stroller merupakan contoh sederhana sistem gerak lokomotif dengan kendalan non holonomik yang selalu melibatkan kecepatan sistem dan membatasi gerakan sistem dalam ruang konfigurasi. Dinamika Stroller digambarkan dengan baik melalui keragaman Riemannan dan objek-objek matematis dengan metode koneksi Levi Civita yang dapat melenyapkan kendala forma berderajat satu dan mendiagonalkan metrik inersianya sehingga sistem tunduk pada kendala tak holonomik dan gaya luar.

DAFTAR PUSTAKA

Ariska, M., Akhsan, H., & Muslim, M. (2020a). Dynamic Analysis of Tippe Top on Cylinder's Inner Surface with and Without Friction based on Routh Reduction. *Journal of Physics: Conference Series*, *1467*(1).

Ariska, M., Akhsan, H., & Muslim, M. (2020b). Potential energy of mechanical system dynamics with nonholonomic constraints on the cylinder configuration space. *Journal of Physics: Conference Series*, *1480*(1).

Ariska, M., Akhsan, H., & Muslim, M. (2019). Utilization of physics computation based on maple in determining the dynamics of tippe top. *Journal of Physics: Conference Series*, *1166*(1).

Ariska, Melly, Akhsan, H., & Zulherman, Z. (2018). Utilization of Maple-based Physics Computation in Determining the Dynamics of Tippe Top. *Jurnal Penelitian Fisika Dan Aplikasinya (JPFA)*, *8*(2), 123.

Bou-Rabee, N. M., Marsden, J. E., & Romero, L. A. (2004). Tippe top inversion as a dissipation-induced instability. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, *3*(3), 352–377.

Bou-Rabee, N. M., Marsden, J. E., & Romero, L. A. (2008). Dissipation-induced heteroclinic orbits in tippe tops. *SIAM Review*, *50*(2), 325–344.

Branicki, M., Moffatt, H. K., & Shimomura, Y. (2006). Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. III. Geometry of steady state structures for convex bodies. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *462*(2066), 371–390.

Branicki, M., & Shimomura, Y. (2006). Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. IV. Stability of steady spin states and the "rising egg" phenomenon for convex axisymmetric bodies. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *462*(2075), 3253–3275.

Domercq, C., Hall, B., Gare, B., Jean, S., Gare, B., & Jean, S. (2015). *Hall b* (pp. 7–8).

Fowles, G. R., & Cassiday, G. L. (2004). *Analytical Mechanics (7th Edition)*.

Glad, S. T., Petersson, D., & Rauch-Wojciechowski, S. (2007). Phase space of rolling solutions of the tippe top. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, *3*.

Holm, D. D. (2011). Geometric Mechanics. In *Geometric Mechanics*.

Moffatt, H. K., & Tokieda, T. (2008). Celt reversals: A prototype of chiral dynamics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, *138*(2), 361–368.

Sriyanti, I., Ariska, M., Cahyati, N., & Jauhari, J. (2020). Moment of inertia analysis of rigid bodies using a smartphone magnetometer. *Physics Education*, *55*(1).

Ueda, T., Sasaki, K., & Watanabe, S. (2005). Motion of the tippe top: Gyroscopic balance condition and stability. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, *4*(4), 1159–1194.

Zobova, A. A. (2012). Comments on the Paper by M.C. Ciocci, B. Malengier, B. Langerock, and B. Grimonprez "Towards a Prototype of a Spherical Tippe Top." *Regular and Chaotic Dynamics*, *17*(3–4), 367–369.